Etude d'une mission habitée sur Mars.

On prend dans ce problème l'année terrestre comme unité de temps (T_T=1an) et le demi grand axe de son orbite autour du soleil comme unité, c'est du reste ce que l'on appelle l'unité astronomique (a_T=1 U.A.). Pour simplifier l'étude qui suit, l'on suppose les orbites de la Terre et de Mars circulaires et coplanaires avec le soleil au centre, de rayon respectifs a_T=1 U.A. et a_M=1,5 U.A. (la valeur exacte est 1,524)

Question 1 :
Quelle est la durée de l'année martienne ? Quelle loi a-t-on utilisée ? La redémontrer dans le cas particulier des mouvements circulaires.

On utilise la troisième loi de Kepler qui affirme que, pour tous les astres qui tournent autour du même centre attracteur, le rapport T^2/a^3 a une valeur commune. Donc

$$\frac{T_M^2}{a_M^3} = \frac{T_T^2}{a_T^3} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{T_M}{T_T} = \left(\frac{a_M}{a_T}\right)^{\frac{3}{2}} = 1,5^{\frac{3}{2}} = 1,837$$

Une année martienne dure donc 1,837 année[1] terrestre soit 671 jours.

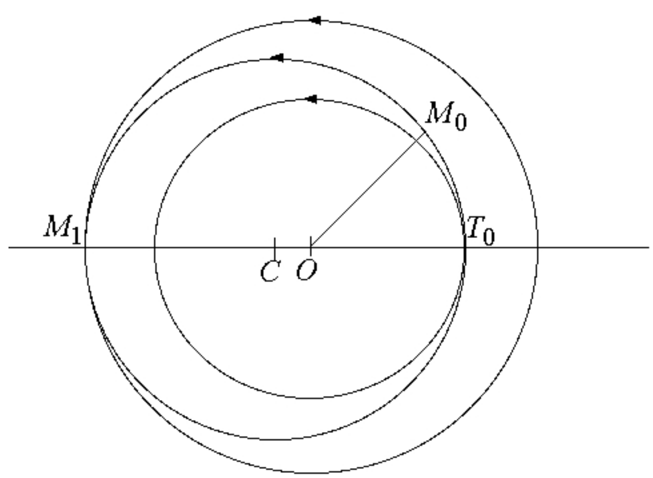
Pour un mouvement circulaire de rayon a d'un astre de masse m attiré par le soleil de masse M de vitesse angulaire $\omega = 2\,\pi/T$, on a, en projetant le principe fondamental de la dynamique sur la direction radiale et en notant γ l'accélération comme au bon vieux temps :

$$m\,\gamma = -m\,a\,\omega^2 = -\frac{4\,\pi^2\,m\,a}{T^2} = F = -\frac{G\,m\,M}{a^2} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\,\pi^2}{G\,M}$$

Remarquons au passage que cette loi permet la mesure de M, c'est pourquoi elle est précieuse en tant que balance en astronomie.

Dans le cas elliptique, cette loi est plus difficile à démontrer et seul le résultat est exigible.

Question 2 :
On peut montrer que la façon la plus économique de faire le trajet Terre-Mars est d'utiliser l'orbite de transfert de Hohmann qui est une ellipse tangente aux extrémités de son grand axe aux orbites de la Terre en T_0 et de Mars en M_1, le véhicule n'étant mû que par l'attraction solaire. Les moteurs ne fonctionnent que très brièvement en M_0 pour donner l'impulsion initiale et en M_1 pour acquérir la même vitesse que Mars et s'y satelliser en vue de l'atterrissage. Quelle sont les caractéristiques géométriques de cette ellipse et quelle est la durée du voyage ?



[1] L'usage, dans le cas de nombres non entiers, veut que l'on ne mette le «s» du pluriel qu'à partir de 2.

Le grand axe, dont la longueur est traditionnellement notée $2\,a$, est bien sûr $M_1\,T_0$, donc

$$a = \frac{1}{2}\,(M_1\,O + O\,T_0) = \frac{1}{2}\,(1,5+1) = 1,25\;U.A.$$

La distance focale, traditionnellement notée c, est la distance entre le foyer, noté ici O, (le soleil) et le centre C, donc

$$c = C\,O = C\,T_0 - O\,T_0 = a - O\,T_0 = 1,25 - 1 = 0,25\;U.A.$$

On en déduit l'excentricité, par définition $e = c/a$, et le demi petit axe b, en se souvenant que $a^2 = b^2 - c^2$:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{0,25}{1,25} = 0,2$$

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{1,25^2 - 0,25^2} = 1,225\;U.A.$$

Remarquons au passage qu'avec une excentricité de 20%, b est très proche de a (98% de a) : l'ellipse ressemble à un cercle, sauf que le soleil est loin du centre. Il a donc fallu beaucoup d'intuition à Kepler pour deviner que les orbites des planètes sont elliptiques.

Rappelons que l'équation cartésienne d'une ellipse dans un repère avec origine au centre (ici C) est :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

et que son équation polaire dans un repère avec origine au foyer (ici O) est :

$$r = \frac{p}{1 + e\,\cos\theta}$$

e a été calculé, si vous voulez p, il faut se souvenir de la formule $p = \frac{b^2}{a}$, donc :

$$p = \frac{b^2}{a} = \frac{a^2 - c^2}{a} = \frac{1,25^2 - 0,25^2}{1,25} = 1,20\;U.A.$$

La période de mouvement sur cette ellipse est donnée, comme plus haut, par la troisième loi de Kepler :

$$\frac{T}{T_T} = \left(\frac{a}{a_T}\right)^{\frac{3}{2}} = 1,25^{\frac{3}{2}} = 1,398$$

et la durée du voyage (une demi-ellipse) en est la moitié soit 0,699 année ou 255 jours.

Question 3 :

Au moment du départ de la Terre, Mars est en M_0. Montrer qu'on ne peut partir que quand l'angle $\widehat{T_0\,O\,M_0}$ a une valeur particulière. A quelle périodicité retrouve-t-on cette «fenêtre de lancement» ?

Mars parcourt 360° en 1,837 année, sa vitesse angulaire est donc 360/1,837 et pendant la duréée du voyage (0,699 année), il parcourt :

$$\widehat{M_0OM_1} = \frac{360}{1,837}\,0,699 = 137^\circ$$

et par différence

$$\widehat{T_0OM_0} = 180 - 137 = 43^\circ$$

calculons la vitesse de variation de l'angle Terre-Soleil-Mars :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\widehat{TOM} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\widehat{xOM} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\widehat{xOT} = \frac{360}{1,837} - \frac{360}{1} = -164^\circ/\mathrm{an}$$

Si l'on rate la fenêtre $\widehat{T_0OM_0} = 43^\circ$, il faut attendre, puisque l'angle diminue, la fenêtre 43°-360°. Le temps d'attente sera :

$$T = \frac{-360}{-164} = 2,195\,\text{années}$$

Question 4 :

Si le vol est habité et que l'on prévoit donc un retour par une autre ellipse de Hohmann, on peut montrer, par un raisonnement identique, qu'au moment du retour sur Terre, l'angle $\widehat{TOM}$ doit être de -43°. Calculer la durée minimale de la mission.

Le départ de Terre se fait avec $\widehat{TOM} = 43^\circ$ et le retour à $\widehat{TOM} = -43^\circ$. Comme l'angle varie de -164°/an, ça semble facile : le voyage dure [(-43)-(+43)]/(-164)=0,524 année. Manque de pot, c'est inférieur à la somme des durées des voyage aller et retour (0,699+0,699=1,398). En fait le retour a lieu à $\widehat{TOM} = -43^\circ$ modulo 360°, donc au plus court à $\widehat{TOM} = -43^\circ - 360^\circ = -403^\circ$ et le voyage durera [(-403)-(+43)]/(-164)=2,720 années dont le détail suit :

- voyage aller : 0,699 an
- séjour d'enfer : 1,322 an
- voyage retour : 0,699 an

Question 5 :

Quelle est la vitesse de la Terre sur son orbite ? Celle de Mars ? Quelle doit être la vitesse du vaisseau à son départ de la terre ? Quelle sera sa vitesse à l'arrivée sur Mars ?

Pour les deux premières questions, c'est simple : on parcourt la circonférence du cercle pendant la période, donc

$$v_T = \frac{2\,\pi\,a_T}{T_T} = \frac{2\,\pi\,1}{1} = 6,28\;U.A./\text{an}$$

$$v_M = \frac{2\,\pi\,a_M}{T_M} = \frac{2\,\pi\,1,5}{1,837} = 5,13\;U.A./\text{an}$$

où, avec une unité astronomique de 149,6 millions de kilomètres, une unité astronomique par an, ça fait 4,74 km/s.

Pour les questions suivantes, il faut bien connaître son cours sur la loi des aires : L'aire $\mathcal{A}$ du triangle curviligne T_0OM balayé par le segment OM reliant le soleil et le vaisseau varie proportionnellement au temps et

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{A}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\,r^2\,\dot{\theta} = \frac{1}{2}\frac{\sigma}{m} = \frac{1}{2}\,\|\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{v_M}\|$$

Or en T_0, la vitesse du vaisseau est normale à OT_0 (notons v_0 sa norme) et en M_1, la vitesse du vaisseau est normale à OM_1 (notons v_1 sa norme), d'où

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{A}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\,a_T\,v_0 = \frac{1}{2}\,a_M\,v_1$$

Reste à estimer le premier membre en envisageant l'aire balayée pendant le voyage, soit celle d'une demi-ellipse, soit $\pi\,a\,b/2$

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{A}}{\mathrm{d}t} = \frac{3,14 \cdot 1,25 \cdot 1,225}{2 \cdot 0,699} = 3,44\,U.A.^2/\text{an}$$

$$v_0 = \frac{2 \cdot 3,44}{1} = 6,88\,U.A./\text{an}$$

$$v_0 = \frac{2 \cdot 3,44}{1,5} = 4,59\,U.A./\text{an}$$

La phase de lancement consiste à passer de la vitesse de la Terre (6,28 UA/an) à v_0 (6,88 UA/an), c'est-à-dire à atteindre une vitesse relative de 0,60 UA/an soit 2,8 km/s. De même à l'arrivée sur Mars, il faudra passer de 4,59 à 5,13 UA/an, soit passer d'une vitesse relative de -0,54 UA/an à 0.

Question 6 :

Estimer les caractéristiques de la phase de lancement : accélération, durée, distance parcourue.

Après entraînement dans une centrifugeuse, les astronautes subissent au décollage des accélérations de 5 g soit 50 $\mathrm{m\,s^{-2}}$. Ils passent d'une vitesse nulle à 2,8 km/s, disons 3 km/s. (cf supra) en 60 secondes, soit une minute. On devrait savoir à la longue, sinon on le redémontre aisément, que, dans un mouvement uniformément accéléré à partir d'une vitesse nulle, la distance parcourue est la moitié du produit de la durée par la vitesse finale soit 60 fois 1,5 km/s, c'est-à-dire 90 km, c'est peu comparé à la longueur du voyage. Le lancement peut donc, à cette échelle, être considéré comme ponctuel.